

## LAHENDUSED 12.KLASS

1. Vastus:  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = -3$ ;  $n_3 = -5$

### Lahendus:

Kasutame astendamise omadusi:

$$(n^2 + 2n - 4)^{n+5} = 1 \text{ kui}$$

$$n^2 + 2n - 4 = 1 \text{ või } n + 5 = 0$$

või  $n^2 + 2n - 4 = -1$  ja samal ajal  $n + 5$  on paarisarv.

Vaatleme kõiki neid variante:

$$n^2 + 2n - 4 = 1$$

$$n^2 + 2n - 5 = 0$$

$$n = -1 \pm \sqrt{6}, \text{ mis ei ole täisarv}$$

$$n + 5 = 0$$

$$n = -5$$

$$((-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 4)^{-5+5} = 1$$

$$11^0 = 1 \text{ ehk } n = -5 \text{ sobib}$$

$$n^2 + 2n - 4 = -1$$

$$n^2 + 2n - 3 = 0$$

$$n_1 = 1; n_2 = -3$$

Mõlemad  $n$  väärtused on täisarvulised. Kontrollime, kas astendajad on paarisarvulised:

$$(1^2 + 2 \cdot 1 - 4)^{1+5} = 1$$

$$(-1)^6 = 1$$

$$((-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 4)^{-3+5} = 1$$

$$(-1)^2 = 1$$

Vastus:  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = -3$ ;  $n_3 = -5$

**Hindamine:**

Astme 1-ga võrdumise tingimuste välja kirjutamine 2p

Leitud  $n$  väärtused, kui  $n^2 + 2n - 4 = 1$  ning järeldatud, et need ei sobi 2p

Leitud, et sobib  $n = -5$  1p

Leitud  $n$  väärtused kui  $n^2 + 2n - 4 = -1$  ja kontrollitud, et need sobivad 2p

**7p**

2. Vastus: a)  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 4089158$

b)  $b_{2022} = 2045253$

**Lahendus:**

a) Märkame, et kuna vahed korduvad, siis  $a_{n+3} = a_n + 6$ .

Summa leidmiseks vaatleme järgmiseid aritmeetilisi jadasid:

1.jada:  $a_1; a_4; a_7; \dots; a_{2020}$  ehk 1; 7; 13; ...; 4039

2.jada:  $a_2; a_5; a_8; \dots; a_{2021}$  ehk 3; 9; 15; ...; 4041

3.jada:  $a_3; a_6; a_9; \dots; a_{2022}$  ehk 6; 12; 18; ...; 4044

Iga aritmeetilise jada vahe on 6 ja liikmete arv on  $2022:3 = 674$ .

Leiame summad:

$$1.jada: S = \frac{2 \cdot 1 + (674-1) \cdot 6}{2} \cdot 674 = 1361480$$

$$2.jada: S = \frac{2 \cdot 3 + (674-1) \cdot 6}{2} \cdot 674 = 1362828$$

$$3.jada: S = \frac{2 \cdot 6 + (674-1) \cdot 6}{2} \cdot 674 = 1364850$$

$$\text{Kust } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 1361480 + 1362828 + 1364850 = 4089158$$

b) Kuna vahed moodustavad naturaalarvude jada, siis

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1 + 2 = 3$$

$$b_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$b_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Ehk  $b_n$  on võrdne esimese  $n$  naturaalarvude summaga ning

$$b_{2022} = 1 + 2 + 3 + \dots + 2022 = \frac{1 + 2022}{2} \cdot 2022 = 2045253$$

**Hindamine:**

- |   |           |
|---|-----------|
| a) Märkus, et $a_{n+3} = a_n + 6$                                     | 1p        |
| Idee, et summa leidmiseks tuleb leida kolme aritmeetilise jada summad | 1p        |
| Iga aritmeetilise jada summa leidmine                                 | 1p        |
| Vastuse leidmine  | 1p        |
| b) Märkus, et $b_n$ on võrdne esimese $n$ naturaalarvude summaga      | 2p        |
| $b_{2022}$ leidmine   | 1p        |
|   | <b>7p</b> |

**3. Vastus:**  $x \in [-2, 5; -\sqrt{6})$

**Lahendus:**

$$\log_{x+3}(x^2 - 6) \geq \log_{x+3}(x + 3)^2$$

Logaritmi definitsioonist saame:  $x^2 - 6 > 0$ ,  $x + 3 > 0$  ja  $x + 3 \neq 1$

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty) \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$$

Kui  $x + 3 > 1$  ehk  $x > -2$ :

Kui  $0 < x + 3 < 1$  ehk  $-3 < x < -2$ :

$$x^2 - 6 \geq (x + 3)^2$$

$$x^2 - 6 \leq (x + 3)^2$$

$$x^2 - 6 \geq x^2 + 6x + 9$$

$$x \geq -2,5$$

$$-6x \geq 15$$

$$x \in [-2,5; -2)$$

$$x \leq -2,5$$

Lahend puudub

$$\begin{cases} x \in (-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty) \\ x \in [-2,5; -2) \end{cases} \Rightarrow x \in [-2,5; -\sqrt{6})$$

**Hindamine:**

Logaritmi definitsiooni kasutamine ja määramispiirkonna leidmine 3p

Näitamine, et kui  $x > -2$ , siis lahend puudub ja  $x$  väärtuste

leidmine kui  $-3 < x < -2$  3p

Õige vastus 1p

**7p**

#### 4. Vastus: a) jah, leidub; b) jah, leidub

##### Lahendus:

a) Jah, leidub:

Kustutame arvud 2020 ja 2022, asemele tuleb nende aritmeetiline keskmine ehk 2021.  
Edasi kustutame arvud 2021 ja 2021, nende asemele tuleb 2021.

Nüüd on tahvlil arvud: 1, 2, 3, 4, ..., 2018, 2019, 2021

Edasi kustutakse iga käiguga kaks kõige suuremat arvu, mis tahvlil on olemas:

Kustutame 2019 ja 2021, asemele tuleb 2020

Kustutame 2020 ja 2018, asemele tuleb 2019

Kustutame 2019 ja 2017, asemele tuleb 2018 jne

Lõpuks jäävad tahvlile arvud 1 ja 3 ning viimaseks arvuks tahvlile jääb arv 2.

b) Jah, leidub:

Kui meil on olemas järjestatud naturaalarvud  $a, a + 1, a + 2, \dots, b - 1, b$ , siis osas a) kirjeldatud algoritmi kasutades on võimalik saada arv  $a + 1$ .

Sama algoritmi kasutades on võimalik saada ka arv  $b - 1$ :

Selleks:

1) kustutame arvud  $a$  ja  $a + 2$ , asemele tuleb  $a + 1$

2) kustutame arvud  $a + 1$  ja  $a + 1$ , asemele tuleb  $a + 1$

Nüüd on tahvlil arvud:  $a + 1, a - 1, a - 2, \dots, b - 1, b$

Edasi kustutakse alati kaks kõige väiksemat arvu, mis tahvlil on olemas, ning lõpuks jääb arv  $b - 1$ .

Arvu 999 saamiseks:

Hulgast 1, 2, 3, ..., 998 saame arvu 997 kirjeldatud algoritmi abil.

Hulgast 1000, 1001, ..., 2022 saame arvu 1001 kirjeldatud algoritmi abil

Nüüd on tahvlil arvud 997, 999, 1001,

Edasi kustutame 997 ja 1001, nende asemele tuleb 999.

Ja lõpuks kustutame 999 ja 999 ning tahvlile jääb 999.

##### Hindamine:

- |   |    |
|---|----|
| a) Käikude jada kirjeldus   | 3p |
| b) Käikude jada kirjeldus   | 4p |
| (sh märkus, et punktis a) kirjeldatud algoritmi kasutades on võimalik saada arv $a + 1$ või arv $b - 1$ | 2p |

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 0p.

5. Vastus: Koonuse kõrgus on  $\sqrt{85} + 1$  cm.

**Lahendus:**

Olgu koonuse kõrgus  $H$  ja põhja raadius  $R$ .

Koonuse ruumala:  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ .

Kolmnurgad  $CKE$  ja  $CFB$  on sarnased

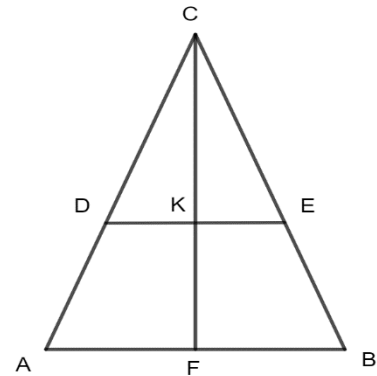
( $\angle CKE = \angle CFB = 90^\circ$  ning nurk  $\angle FCB$  on ühine)

Ning  $\frac{CF}{CK} = \frac{FB}{KE}$ , kust  $KE = \frac{CK \cdot FB}{CF}$

et  $CK = 8$ cm,  $FB = R$  ning  $CF = H$

Saame  $KE = \frac{8R}{H}$ .

Ning vee ruumala on  $\frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{8R}{H}\right)^2 \cdot 8 = \frac{1}{3}\pi R^2 \left(H - \frac{512}{H^2}\right)$ .



Nüüd on põhi ülespoole ja  $FK = 2$ .

Olgu  $CK = x$

Kolmnurgad  $CKE$  ja  $CFB$  on sarnased

Ning  $\frac{CF}{CK} = \frac{FB}{KE}$ , kust  $KE = \frac{CK \cdot FB}{CF}$

Et  $CK = x$ ,  $FB = R$ ,  $CF = H$

Saame  $KE = \frac{xR}{H}$

Ning vee ruumala on  $\frac{1}{3}\pi \left(\frac{xR}{H}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{x^3}{H^2}$

Kuna vee kogus ei ole muutunud, siis

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \left(H - \frac{512}{H^2}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^3}{H^2}$$

$$H - \frac{512}{H^2} = \frac{x^3}{H^2}$$

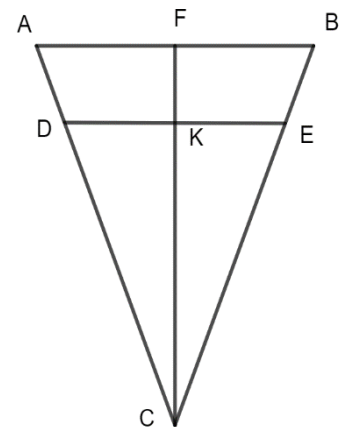
$$H^3 - 512 = x^3$$

$$H^3 - x^3 = 512$$

$$(H - x)(H^2 + Hx + x^2) = 512$$

Kuna  $H - x = 2$ , siis

$$2(H^2 + Hx + x^2) = 512$$



$$H = x + 2$$

$$(x + 2)^2 + x(x + 2) + x^2 = 256$$

$$3x^2 + 6x - 252 = 0$$

$$x_{,1} = \frac{-6 - 6\sqrt{85}}{6} = -1 - \sqrt{85}$$

ei sobi kuna pikkus ei saa negatiivne olla

$$x_2 = -1 + \sqrt{85} \text{ ehk}$$

$CK = (\sqrt{85} - 1) \text{ cm}$  ning koonuse kõrgus on

$$CF = \sqrt{85} - 1 + 2 = (\sqrt{85} + 1) \text{ cm}$$

### **Hindamine:**

- |  |    |
|--|----|
| Põhjendus, et kolmnurgad $CKE$ ja $CFB$ on sarnased ning sarnasuse kasutamine              | 2p |
| Vee koguse ruumala avaldamine koonuse raadiuse ja kõrguse kaudu                            | 1p |
| Vee kõrguse tähistamine $x$ -ga ning vee koguse avaldamine $x$ , raadiuse ja kõrguse kaudu | 1p |
| Võrrandi koostamine  | 1p |
| Võrrandist $x$ leidmine ning koonuse kõrguse leidmine                                      | 2p |